Réductions des Endomorphismes

I – Généralités :

Propriété :
Toute famille de p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est une famille libre.

Propriété :
La somme de p sous-espaces propres de l'endomorphisme u associés à des valeurs propres distinctes est une somme directe.

Définition :
Soit E un K-espace vectoriel de dimension quelconque. Soit $u \in L(E)$.

Soit $P \in K[x]$, $P(X)=\sum_{k=0}^{p} a_k .X^k$. On pose $P(u)=\sum_{k=0}^{p} a_k .u^k$ et $u^0=Id$.

On dit que P(u) est un polynôme de l'endomorphisme u. On note K[u] l'ensemble des polynômes de u. Donc K[u] = {P(u) | P ∈ K[X] }. P(u) est une partie de L(E). On dit que u annule le polynôme P si et seulement si P(u) = 0 (l'endomorphisme nul).

Propriété :
$u \in L(E)$ étant fixé, l'application $K[X] \to L(E)$, $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre.

Propriété :
$\forall u \in L(E). \forall P \in K[X]$. Si $\lambda \in sp(u)$, alors $P(\lambda) \in sp(P(u))$.

Propriété :
Si P est un polynôme annulateur de u, alors sp(u) ∈ { zéros de P }

II – Cas de la dimension finie :

Définition :
Soit $u \in L(E)$ où E est de dimension n finie. On appelle polynôme caractéristique de l'endomorphisme u le polynôme de degré n (=dim E) défini par la formule : $P_u(\lambda) = \det (u - \lambda.I_E)$.

Propriété :
Les valeurs propres de u sont les racines du polynôme caractéristique de u : sp(u) = { zéros de P_u }.

Définition :
Si $\lambda \in sp(u)$, on appelle multiplicité de λ sa multiplicité en tant que zéro du polynôme caractéristique.

Propriété :
Soit u ∈ L(E) avec dim E = n. Si P_u est scindé (ce qui est en particulier le cas si K=C), alors en comptant chaque valeur propre autant de fois que sa multiplicité, on a :

1°) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(u)$

2°) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(u)$

Remarque : (souvent considéré comme résultat de cours)
Soit E de dimension n et u ∈ L(E). Si λ est une valeur propre de u de multiplicité r, et si E_λ est le sous-espace propre associé à λ. Alors : $1 \leq \dim E_\lambda \leq r$.

III – Diagonalisation :

Définition :
On dit qu'un endomorphisme u de E (dim E = n) est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres (dont on sait qu'elle est directe) est égale à E.

Propriété : (Caractérisation des endomorphismes diagonnalisables)
Pour u ∈ L(E) donné, on a les équivalences :
1°) u est diagonnalisable.
2°) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
3°) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonnale.
4°) Σ dim E_λ = dim E.

Propriété : (Condition suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonnalisable)
Soit u ∈ L(E). Si le polynôme caractéristique P_u est simplement scindé (c'est-à-dire scindé et toutes les racines sont simples). Alors u est diagonnalisable.

Définition :
Soit U une matrice carrée d'ordre n. On dit que U est diagonnalisable si et seulement si l'endomorphisme u de K^n canoniquement associé à U est diagonnalisable.

Propriété : (Caractérisation)
Soit U ∈ $M_n(K)$ donnée. Alors, U est diagonnalisable si et seulement si U est semblable à une matrice U' diagonnale. C'est-à-dire s'il existe une matrice P∈ $GL_n(K)$ telle que : $U' = P^{-1}.U.P$. U' est alors appelée matrice réduite de U et P matrice de passage à une base de vecteurs propres.

Propriété : (Condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonnalisable)
Pour qu'un endomorphisme soit diagonnalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme simplement scindé. Plus précisément :
1°) Si u est diagonnalisable, alors u annule le polynôme P = $\prod_{\lambda \in sp(u)} (X - \lambda)$.
2°) Réciproquement, si u annule un polynôme simplement scindé, alors u est diagonnalisable.

Remarque :
Le polynôme P = $\prod_{\lambda \in sp(u)} (X - \lambda)$ divise le polynôme caractéristique mais ne lui est pas forcément égal.

Propriété : (Théorème de Cayley-Hamilton) (Hors-programme)
En dimension finie, tout endomorphisme annule son polynôme caractéristique.
$\forall u \in L(E)$, $P_u(u) = 0$.

Propriété :
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable (sur R). De plus, on peut trouver une base de vecteurs (de R^n) orthonormale pour le produit scalaire canonique.

Méthodes pratiques pour diagonnaliser un endomorphisme :
1°) On cherches des valeurs propres apparentes. Si on arrive à en trouver (n – 1), on utilise la trace pour trouver la dernière.
2°) On cherche un polynôme annulateur, si possible simplement scindé.
3°) Si la matrice A s'écrit sous la forme A = a.I + b.J avec $b \neq 0$. On étudie la diagonalisation de J. Si J est diagonnalisable, alors $J' = P.J'.P^{-1}$ et on en déduit la diagonnalisation de A : $A = P.A'.P^{-1}$ avec A' = a.I + b.J' .

4°) Si on peut écrire $A = \sum_{k=0}^{p} a_k.J^k$ et si J est diagonnalisable, alors A est diagonnalisable et on en déduit une diagonnalisation de A.

Propriété :
Si $u \in L(E)$ est diagonnalisable et si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors l'endomorphisme de F induit par u est diagonnalisable.

IV – Applications de la diagonnalisation des endomorphismes : ! METHODE !

Calcul de la puissance n-ième d'une matrice A :
1°) Si on peut écrire A sous la forme : A = a.I + b.J avec J nilpotente par exemple, alors on applique la formule du binôme de Newton (I et J commutent)
2°) Si A est diagonalisable, alors 2 solutions :
→ On utilise le polynôme annulateur.
→ On utilise $A = P.A'.P^{-1}$, d'où : $A^n = P.(A')^n.P^{-1}$.

Etude de certaines suites récurrentes :
Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée de u_0 , v_0 et $\begin{cases} u_{n+1} = a.u_n + b.v_n \\ v_{n+1} = c.u_n + d.v_n \end{cases}$
On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Alors $X_n = A^n.X_0$

Mais aussi : trouver le commutant d'une matrice, résolution d'équations différentielles, …

© Archi 2001
http://www.prepasciences.com